APPENDIX TO "TWISTING OF SIEGEL PARAMODULAR FORMS"

JENNIFER JOHNSON-LEUNG
BROOKS ROBERTS

Abstract. In this appendix we present an expanded version of Section 4 of our paper [JR], including the proofs of all of the technical lemmas.

1. Introduction

This paper is an appendix to our paper [JR]. Here, we present an expanded version Section 4 of [JR] including detailed proofs of the all of the technical lemmas. Throughout this appendix, we will use the following notation. Let F be a nonarchimedean local field of characteristic zero, with ring of integers $\mathfrak{o}$ and generator ϖ of the maximal ideal $\mathfrak{p}$ of $\mathfrak{o}$. We let q be the number of elements of $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ and use the absolute value on F such that $|\varpi| = q^{-1}$. We use the Haar measure on the additive group F that assigns $\mathfrak{o}$ measure 1 and the Haar measure on the multiplicative group $F^\times$ that assigns $\mathfrak{o}^\times$ measure $1 - q^{-1}$. We χ be a quadratic character of $F^\times$ of conductor $\mathfrak{p}$. Let

$$J' = \begin{bmatrix} &&&1\\ &&1&\\ &-1&&\\ -1&&& \end{bmatrix}.$$

For this section only, we define $\mathrm{GSp}(4, F)$ as the subgroup of all $g \in \mathrm{GL}(4, F)$ such that ${}^tgJ'g = \lambda(g)J'$ for some $\lambda(g) \in F^\times$ called the multiplier of g. For n a non-negative integer, we let $\mathrm{K}(\mathfrak{p}^n)$ be the subgroup of $k \in \mathrm{GSp}(4, F)$ such that $\lambda(k) \in \mathfrak{o}^\times$ and

$$k \in \begin{bmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{-n}\\ \mathfrak{p}^n & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o}\\ \mathfrak{p}^n & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o}\\ \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^n & \mathfrak{o} \end{bmatrix}.$$

Throughout this section, (π, V) is a smooth representation of $\mathrm{GSp}(4, F)$ for which the center acts trivially. If n is a non-negative integer, then $V(n)$ is the subspace of vectors fixed by the paramodular subgroup $\mathrm{K}(\mathfrak{p}^n)$; also, we let $V(n, \chi)$ be the subspace of vectors $v \in V$ such that $\pi(k)v = \chi(\lambda(k))v$ for $k \in \mathrm{K}(\mathfrak{p}^n)$. Finally, let

$$\eta = \begin{bmatrix} \varpi^{-1}&&&\\ &1&&\\ &&1&\\ &&&\varpi \end{bmatrix}, \qquad \tau = \begin{bmatrix} 1&&&\\ &\varpi^{-1}&&\\ &&\varpi&\\ &&&1 \end{bmatrix}, \qquad t_4 = \begin{bmatrix} &&&-\varpi^{-4}\\ &1&&\\ &&1&\\ \varpi^4&&& \end{bmatrix}.$$

Usually, we will write η and τ for $\pi(\eta)$ and $\pi(\tau)$, respectively.

In [JR1] we constructed a twisting map,

$$T_\chi : V(0) \to V(4, \chi), \tag{1}$$

given by

$$T_\chi(v) = q^3 \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&x&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dx\,dz \tag{P1}$$

$$+ q^3 \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&y&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dy\,dz \tag{P2}$$

$$+ q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(t_4\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&x&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-3}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dx\,dz \tag{P3}$$

$$+ q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(t_4\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&y&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-3}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dy\,dz. \tag{P4}$$

Remark 1.1. The Iwasawa decomposition asserts that $\mathrm{GSp}(4, F) = B \cdot \mathrm{GSp}(4, \mathfrak{o})$ where B is the Borel subgroup of upper-triangular matrices in $\mathrm{GSp}(4, F)$. Hence, if $v \in V(0)$ so that v is invariant under $\mathrm{GSp}(4, \mathfrak{o})$, then it is possible to obtain a formula for $T_\chi(v)$ involving only upper-triangular matrices. The remainder of this section will be devoted to calculating formulas for the terms (P1), (P2), (P3), (P4) involving only upper-triangular matrices. The resulting formula for $T_\chi(v)$ is given in the following theorem. The proof of this theorem is spread over four sections of technical lemmas. In some cases, we directly provide an Iwasawa identity $g = bk$ where $g \in \mathrm{GSp}(4, F)$, $b \in B$, and $k \in \mathrm{GSp}(4, \mathfrak{o})$. In many cases, we are able to obtain an appropriate Iwasawa identity by using the following formal matrix identity

$$\begin{bmatrix}1&\\x&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&x^{-1}\\&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x^{-1}&\\&-x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1\\-1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x^{-1}\\&1\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Both methods will require that we decompose the domains of integration in an advantageous manner. The assumptions on the character, $\chi \neq 1$, $\chi^2 = 1$ and $\chi(1 + \mathfrak{p}) = 1$, also play a significant role in the computations.

Theorem 1.2. *Let $v \in V(0)$. Then the twisting operator (1) is given by the formula*

$$T_\chi(v) = \sum_{k=1}^{14} T_\chi^k(v)$$

where

$$T_\chi^1(v) = q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-(a+xb)\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&(a+xb)\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&x^{-1}\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz,$$

$$T_\chi^2(v)=q\eta\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\chi(abxy)\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&-a\varpi^{-2}&ab(1-(1-y)^{-1}x)\varpi^{-3}\\&1&ab^{-1}(1-x)^{-1}\varpi^{-1}&-a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dy,$$

$$T_\chi^3(v)=\eta\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b(1-z))\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&a^2b^{-1}z\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz,$$

$$T_\chi^4(v)=q\eta\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&(b\varpi-ax)\varpi^{-4}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx,$$

$$T_\chi^5(v)=\eta\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-x\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&(b-ax)\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx,$$

$$T_\chi^6(v)=q^{-1}\eta^2\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(bx)\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b(1-x\varpi)\varpi^{-2}\\&1&a^2b^{-1}\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx,$$

$$T_\chi^7(v)=q\tau\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-1}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz,$$

$$T_\chi^8(v)=\eta\tau\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(abz(1-z))\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-1}&-ab(1-z)\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz,$$

$$
\begin{aligned}
T_\chi^9(v) =& q^{-2}\eta^2\tau \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1 & a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & -b\varpi^{-1} \\ & 1 & x\varpi^{-1} & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx,\\
T_\chi^{10}(v) =& q^{-3}\eta^2\tau^2 \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1 & a\varpi^{-2} & & -b\varpi^{-1} \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-2} \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db,\\
T_\chi^{11}(v) =& q^{3}\tau^{-1} \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}1 & & (xb+a\varpi)\varpi^{-3} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & -x\varpi^{-2} & (xb+a\varpi)\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz,\\
T_\chi^{12}(v) =& q^{2}\eta\tau^{-1} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(abz(1-z))\pi(\begin{bmatrix}1 & a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}1 & & y\varpi^{-3} & a(b(1-z)\varpi-y)\varpi^{-4} \\ & 1 & -a^{-1}(y+b\varpi)\varpi^{-2} & y\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz,\\
T_\chi^{13}(v) =& \eta^2\tau^{-1} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(bx)\pi(\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & b(1-x)\varpi^{-1} \\ & 1 & a^2b^{-1}\varpi^{-3} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx,\\
T_\chi^{14}(v) =& q\eta^2\tau^{-2} \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & -b\varpi^{-1} \\ & 1 & x\varpi^{-4} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx.
\end{aligned}
$$

Proof. Substituting the formulas from Lemmas 2.1, 3.1, 4.8 and 5.1 we have that the twisting operator is given by the formula

$$
\begin{aligned}
&T_\chi(v) =\\
&q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1 & -(a+xb)\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & (a+xb)\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}1 & & b\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & x^{-1}\varpi^{-1} & b\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz
\end{aligned}
$$

$$
+ q\chi(-1)\eta \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)} \chi(abx)\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -abx^{-1}(1+x-z)\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}xz(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz
$$

$$
+ \chi(-1)\eta \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b(1-z))\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -b\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dz
$$

$$
+ q\eta \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -x\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & (b\varpi-ax)\varpi^{-4} \\ & 1 & & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx
$$

$$
+ \eta \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & y\varpi^{-1} & a(y+b)\varpi^{-3} \\ & 1 & & y\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy
$$

$$
+ q^{-1}\chi(-1)\eta^2 \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(bx)\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & b(1+x\varpi)\varpi^{-2} \\ & 1 & a^2b^{-1}\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx
$$

$$
+ q\tau \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & b\varpi^{-1} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & b\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dz
$$

$$
+ \eta\tau \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(abz(1-z))\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-1} & -ab(1-z)\varpi^{-3} \\ & 1 & & a\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dz
$$

$$
+ q^{-2}\chi(-1)\eta^2\tau \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\pi(\begin{bmatrix} 1 & a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & b\varpi^{-1} \\ & 1 & x\varpi^{-1} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx
$$

$$+ q^{-3}\chi(-1)\eta^2\tau^2 \int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1 & a\varpi^{-2} & & b\varpi^{-1}\\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db$$

$$+ q^{3}\tau^{-1} \int_{\mathfrak{o}}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & & -(b-xa\varpi)x\varpi^{-3} & z\varpi^{-4}\\ & 1 & x\varpi^{-2} & -(b-xa\varpi)x\varpi^{-3}\\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^{2}\tau^{-1} \int_{\mathfrak{o}}\int_{\mathfrak{o}}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & & (a+by)\varpi^{-2} & z\varpi^{-4}\\ & 1 & -y\varpi^{-1} & (a+by)\varpi^{-2}\\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q\eta\tau^{-1} \int_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int_{\mathfrak{o}}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1 & -a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & & y\varpi^{-2} & a(y+bz)\varpi^{-3}\\ & 1 & a^{-1}(y+bz(z-1)^{-1})\varpi^{-1} & y\varpi^{-2}\\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q^{2}\chi(-1)\eta\tau^{-1} \int_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ba(1-z)z)\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & & -x\varpi^{-3} & b(x-za\varpi)\varpi^{-4}\\ & 1 & b^{-1}(x+a\varpi)\varpi^{-2} & -x\varpi^{-3}\\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+ \chi(-1)\eta^2\tau^{-1} \int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times} \chi(bx)\pi(\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & b(x-1)\varpi^{-1}\\ & 1 & -a^2b^{-1}\varpi^{-3} & a\varpi^{-2}\\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ q\chi(-1)\eta^2\tau^{-2}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-1}\\&1&x\varpi^{-4}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ \eta^2\tau^{-2}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(a)\pi(\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-2}&-a\varpi^{-1}\\&1&y\varpi^{-3}&b\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy.$$

For the remainder of the proof, we will simplify by combining pairs of terms and rewriting certain domains. First we combine the terms involving $\eta^2\tau^{-2}$.

$$q\chi(-1)\eta^2\tau^{-2}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-1}\\&1&x\varpi^{-4}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ \eta^2\tau^{-2}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(a)\pi(\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-2}&-a\varpi^{-1}\\&1&y\varpi^{-3}&b\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy$$

$$= q\chi(-1)\eta^2\tau^{-2}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-1}\\&1&x\varpi^{-4}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ q\chi(-1)\eta^2\tau^{-2}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(a)\pi(\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-2}&a\varpi^{-1}\\&1&y\varpi^{-4}&b\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy$$

$$= q\chi(-1)\eta^2\tau^{-2}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-1}\\&1&x\varpi^{-4}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx.$$

Similarly, we combine the terms involving $\eta\tau^{-1}$,

$$q\eta\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&y\varpi^{-2}&a(y+bz)\varpi^{-3}\\&1&a^{-1}(y+bz(z-1)^{-1})\varpi^{-1}&y\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q^2\chi(-1)\eta\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ba(1-z)z)\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & -x\varpi^{-3} & b(x-za\varpi)\varpi^{-4} \\ & 1 & b^{-1}(x+a\varpi)\varpi^{-2} & -x\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$= q^2\chi(-1)\eta\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(abz(1-z))\pi(\begin{bmatrix} 1 & a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & y\varpi^{-3} & -a(y+b(1-z)\varpi)\varpi^{-4} \\ & 1 & a^{-1}(-y+b\varpi)\varpi^{-2} & y\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz,$$

the two terms involving τ^{-1},

$$q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & -(b-xa\varpi)x\varpi^{-3} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & x\varpi^{-2} & -(b-xa\varpi)x\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\,q^2\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & (a+by)\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & -y\varpi^{-1} & (a+by)\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$=q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & (xb+a\varpi)\varpi^{-3} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & -x\varpi^{-2} & (xb+a\varpi)\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz.$$

and two of the terms that involve the η operator,

$$q\eta\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -x\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & (b\varpi-ax)\varpi^{-4} \\ & 1 & & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+\eta\int_{\mathfrak{o}}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&y\varpi^{-1}&a(y+b)\varpi^{-3}\\&1&&y\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy$$

$$=q\eta\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}}\chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&(b\varpi-ax)\varpi^{-4}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+\eta\int_{\mathfrak{o}}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-x\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&(b-ax)\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx.$$

We rewrite one of the terms involving η after making the observation that if $z\in\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})$ and f is a locally constant function on $\mathfrak{o}^\times$, then

$$\int_{\mathfrak{o}^\times-A(z)}f(x)dx=\int_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}f((z^{-1}-1)(w^{-1}-1)^{-1})dw.$$

Hence

$$q\chi(-1)\eta\int_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times-A(z)}\chi(abx)\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-abx^{-1}(1+x-z)\varpi^{-3}\\&1&-ab^{-1}xz(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$=q\chi(-1)\eta\int_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\chi(abz(1-z)w(1-w))\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-ab(1+zw^{-1}(1-w))\varpi^{-3}\\&1&-ab^{-1}w\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dw\,da\,db\,dz$$

$$=q\chi(-1)\eta\int_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times}\int_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\chi(az^{-1}(1-z)bw^{-1}(1-w))\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-ab(1+zw^{-1}(1-w))\varpi^{-3}\\&1&-ab^{-1}w\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dw\,da\,db\,dz$$

$$= q\chi(-1)\eta \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \chi(a(z^{-1}-1)b(w^{-1}-1))\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -ab(1+z(w^{-1}-1))\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}w\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dw\,da\,db\,dz$$
$$= q\chi(-1)\eta \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \chi(a(z-1)b(w-1))\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -ab(1+z^{-1}(w-1))\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}w^{-1}\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dw\,da\,db\,dz$$
$$= q\chi(-1)\eta \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(-1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(-1+\mathfrak{p})} \chi(aybx)\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -ab(1+(1+y)^{-1}x)\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}(1+x)^{-1}\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dy$$
$$= q\eta \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \chi(abxy)\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & & -a\varpi^{-2} & ab(1-(1-y)^{-1}x)\varpi^{-3} \\ & 1 & ab^{-1}(1-x)^{-1}\varpi^{-1} & -a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dy.$$

Finally, we are able to eliminate the factor $\chi(-1)$ from all terms using an appropriate change of variables. Substituting the simplified terms into the formula for $T_\chi(v)$, we obtain the result. □

2. Calculation of the First Part (P1)

Lemma 2.1. *If $v \in V(0)$, then we have that* (P1) *is given by*

$$q^3 \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & x & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-1} & b\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & b\varpi^{-2} \\ & & 1 & a\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q\tau\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-1}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz$$

$$+ q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&-(b-xa\varpi)x\varpi^{-3}&z\varpi^{-4}\\&1&x\varpi^{-2}&-(b-xa\varpi)x\varpi^{-3}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-(a+xb)\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&(a+xb)\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&x^{-1}\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz.$$

Proof. In this proof we use the methods described in Remark 1.1 to obtain an upper triangular form of summand (P1) of the operator T_χ.

$$q^3\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&x&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q^3\tau\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&x\varpi^{-2}&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-2}&b\varpi^{-1}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-1}\\&&1&a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q^3\tau\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}^2}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-(a+bx\varpi^{-1})\varpi^{-2}&b\varpi^{-1}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-1}\\&&1&(a+bx\varpi^{-1})\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^3\tau\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}-\mathfrak{p}^2}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&x^{-1}\varpi^2&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&&-x^{-1}\varpi^2&\\&-x\varpi^{-2}&&\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&(b+ax^{-1}\varpi)\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-(b+ax^{-1}\varpi)\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$
\begin{aligned}
&= q\tau \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-2} & b\varpi^{-1} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & b\varpi^{-1} \\ & & 1 & a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dz \\
&+ q^3\tau \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & x^{-1}\varpi^2 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -x^{-1}\varpi^2 & & \\ & & -x\varpi^{-2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & (b+ax^{-1}\varpi)\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & -(b+ax^{-1}\varpi)\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz \\
&+ q^3\tau \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\varpi\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & x^{-1}\varpi^2 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -x^{-1}\varpi^2 & & \\ & & -x\varpi^{-2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & (b+ax^{-1}\varpi)\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & -(b+ax^{-1}\varpi)\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz \\
&= q\tau \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & b\varpi^{-1} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & b\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dz \\
&+ q^3\tau \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & x^{-1}\varpi^2 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -x^{-1}\varpi^2 & & \\ & & -x\varpi^{-2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz \\
&+ q^2\tau \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & x^{-1}\varpi & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -x^{-1}\varpi & & \\ & & -x\varpi^{-1} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & (b+ax^{-1})\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & -(b+ax^{-1})\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q\tau \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & b\varpi^{-1} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & b\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dz \\
&+ q^3\tau^{-1} \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & x^{-1}\varpi^{-2} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & -xb\varpi^{-1} & -x^{-1}a\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & -x^{-1}a\varpi^{-2} \\ & & 1 & xb\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz \\
&+ q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & x^{-1}\varpi^{-1} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & -(xb+a)\varpi^{-1} & -x^{-1}a\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & -x^{-1}a\varpi^{-2} \\ & & 1 & (xb+a)\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz \\
&= q\tau \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & b\varpi^{-1} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & b\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dz \\
&+ q^3\tau^{-1} \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & x^{-1}\varpi^{-2} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz \\
&+ q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & -(xb+a)\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & (xb+a)\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & & b\varpi^{-2} & (z+ba\varpi+b^2x\varpi)\varpi^{-4} \\ & 1 & x^{-1}\varpi^{-1} & b\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz \\
&= q\tau \int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & b\varpi^{-1} & z\varpi^{-4} \\ & 1 & & b\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dz
\end{aligned}
$$

$$+ q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&-(b-xa\varpi)x^{-1}\varpi^{-3}&(z+x^{-1}b^2-ba\varpi)\varpi^{-4}\\&1&x^{-1}\varpi^{-2}&-(b-xa\varpi)x^{-1}\varpi^{-3}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-(xb+a)\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&(xb+a)\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&x^{-1}\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q\tau\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-1}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz$$

$$+ q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&-(b-xa\varpi)x^{-1}\varpi^{-3}&z\varpi^{-4}\\&1&x^{-1}\varpi^{-2}&-(b-xa\varpi)x^{-1}\varpi^{-3}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-(xb+a)\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&(xb+a)\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&x^{-1}\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q\tau\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-1}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz$$

$$+ q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&-(b-xa\varpi)x\varpi^{-3}&z\varpi^{-4}\\&1&x\varpi^{-2}&-(b-xa\varpi)x\varpi^{-3}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&-(a+xb)\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&(a+xb)\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&x^{-1}\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz.$$

This completes the calculation of the first term (P1). □

3. Calculation of the Second Part (P2)

Lemma 3.1. *If $v \in V(0)$, then we have that (P2) is given by*

$$q^3\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&y&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q^2\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&(a+by)\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&-y\varpi^{-1}&(a+by)\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz.$$

Proof. This calculation is straightforward and uses only the invariance of v under $\mathrm{GSp}(4,\mathfrak{o})$. We have

$$q^3\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&y&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-4}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&y\varpi^{-2}&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -a\varpi^{-2} & b\varpi^{-1} & z\varpi^{-4}\\ & 1 & & b\varpi^{-1}\\ & & 1 & a\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & -y\varpi^{-2} & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} & z\varpi^{-4}\\ & 1 & & a\varpi^{-2}\\ & & 1 & -b\varpi^{-1}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & & (a+by\varpi^{-1})\varpi^{-2} & (z-b^2y-ba\varpi)\varpi^{-4}\\ & 1 & -y\varpi^{-2} & (a+by\varpi^{-1})\varpi^{-2}\\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q^3\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & & (a+by\varpi^{-1})\varpi^{-2} & z\varpi^{-4}\\ & 1 & -y\varpi^{-2} & (a+by\varpi^{-1})\varpi^{-2}\\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q^2\tau^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & & (a+by)\varpi^{-2} & z\varpi^{-4}\\ & 1 & -y\varpi^{-1} & (a+by)\varpi^{-2}\\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz.$$

This completes the calculation of the second term (P2). $\square$

4. Calculation of the Third Part (P3)

The calculation of the (P3) term is the most delicate. We begin this calculation with a preparatory lemma which breaks the term into four pieces. The majority of this section will be devoted to handling the first of these terms.

Lemma 4.1. *If $v \in V(0)$, then we have that (P3) is given by*

$$q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(t_4\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & x & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -a\varpi^{-1} & b\varpi^{-2} & z\varpi^{-3}\\ & 1 & & b\varpi^{-2}\\ & & 1 & a\varpi^{-1}\\ & & & 1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q^2\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz \tag{3}$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^4&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz \tag{4}$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^5&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz \tag{5}$$

$$+ q^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^6&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz. \tag{6}$$

Proof. In the following computation, we again use the invariance of v under $\mathrm{GSp}(4,\mathfrak{o})$ together with the useful identity (2).

$$q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(t_4\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&x&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-3}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^4\tau\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&x\varpi^{-2}&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\b\varpi^{-1}&1&&\\a\varpi^{-2}&&1&\\z\varpi^{-3}&a\varpi^{-2}&-b\varpi^{-1}&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^4\tau\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&x\varpi^{-2}&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^{-3}&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\a\varpi^{-2}&&1&\\&a\varpi^{-2}&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&&\\b\varpi^{-1}&1&&\\&&1&\\&&-b\varpi^{-1}&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^4\tau\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&x\varpi^{-2}&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^{-3}&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\a\varpi^{-2}&&1&\\&a\varpi^{-2}&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&b^{-1}\varpi&&\\&1&&\\&&1&-b^{-1}\varpi\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b^{-1}\varpi&&&\\&-b\varpi^{-1}&&\\&&b^{-1}\varpi&\\&&&b\varpi^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&&\\-1&&&\\&&&1\\&&-1&\end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & b^{-1}\varpi & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b^{-1}\varpi \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz
$$

$$
= q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^3\tau^2\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & x\varpi^{-4} & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^{-1} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ a\varpi^{-2} & & 1 & \\ & a\varpi^{-2} & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & b^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz
$$

$$
= q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^3\tau^2\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & x\varpi^{-4} & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^{-1} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & a^{-1}\varpi^{2} & \\ & 1 & & a^{-1}\varpi^{2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} -a^{-1}\varpi^{2} & & & \\ & -a^{-1}\varpi^{2} & & \\ & & -a\varpi^{-2} & \\ & & & -a\varpi^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & a^{-1}\varpi^{2} & \\ & 1 & & a^{-1}\varpi^{2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & b^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz
$$

$$
= q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^3\tau^2\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & x\varpi^{-4} & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^{-1} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & a^{-1}\varpi^{2} & \\ & 1 & & a^{-1}\varpi^{2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \varpi^{2} & & & \\ & \varpi^{2} & & \\ & & \varpi^{-2} & \\ & & & \varpi^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & b^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz
$$

$$
= q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & x & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^{3} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & a^{-1}\varpi^{-2} & \\ & 1 & & a^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -b^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & b^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz
$$

$$= q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -(ax+b\varpi)\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & ab\varpi^{-3} \\ & 1 && a\varpi^{-2} \\ && 1 & (ax+b\varpi)\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$= q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3} \\ & 1 && a\varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$= q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3} \\ & 1 && a\varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^4 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3} \\ & 1 && a\varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^5 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3} \\ & 1 && a\varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$+ q^{-1} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^6 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3} \\ & 1 && a\varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz.$$

This completes the preliminary calculation of the third term. □

The following three lemmas calculate the straightforward terms from the decomposition in Lemma 4.1. The strategy in each case is to conjugate by the integral lower triangular matrix, use the invariance of v under $\mathrm{GSp}(4, \mathfrak{o})$, and apply appropriate changes of variables.

Lemma 4.2. *If $v \in V(0)$, then we have that* (4) *is given by*

$$q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^4 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3} \\ & 1 && a\varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$= (q-1) \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3} \\ & 1 && a\varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx.$$

Proof. We calculate (4) as follows:

$$
\begin{aligned}
& q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^4&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz\\
&= q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}1&-(1+bz\varpi)^{-1}bxz\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&(1+bz\varpi)^{-1}bxz\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}1&&-(1+bz\varpi)^{-1}abz\varpi^{-1}&\\&1&&-(1+bz\varpi)^{-1}abz\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}1&&&-(b^2z+ab^2xz^2+b^3z^2\varpi)(1+bz\varpi)^{-2}\varpi^{-2}\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}(1+bz\varpi)^{-1}&&&\\-az(1+bz\varpi)^{-1}\varpi^2&(1-axz+bz\varpi)(1+bz\varpi)^{-1}&-az^2(1+bz\varpi)^{-1}&\\xz(1+bz\varpi)^{-1}\varpi^2&x^2z(1+bz\varpi)^{-1}&(1+axz+bz\varpi)(1+bz\varpi)^{-1}&\\z\varpi^4&xz\varpi^2&az\varpi^2&1+bz\varpi\end{bmatrix})\\
&v\,da\,db\,dx\,dz\\
&= q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}1&-(1+bz\varpi)^{-1}bxz\varpi^{-1}&-(1+bz\varpi)^{-1}abz\varpi^{-1}&-(1+bz\varpi)^{-1}b^2z\varpi^{-2}\\&1&&-(1+bz\varpi)^{-1}abz\varpi^{-1}\\&&1&(1+bz\varpi)^{-1}bxz\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz\\
&= q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}1&xz\varpi^{-1}&az\varpi^{-1}&bz\varpi^{-2}\\&1&&az\varpi^{-1}\\&&1&-xz\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz
\end{aligned}
$$

$$= q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & x(1+z\varpi)\varpi^{-2} & a(1+z\varpi)\varpi^{-2} & b(1+z\varpi)\varpi^{-3}\\ & 1 & & a(1+z\varpi)\varpi^{-2}\\ & & 1 & -x(1+z\varpi)\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= (q-1)\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3}\\ & 1 & & a\varpi^{-2}\\ & & 1 & -x\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx.$$

This completes the calculation. □

Lemma 4.3. *If $v \in V(0)$, then we have that (5) is given by*

$$\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^5 & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3}\\ & 1 & & a\varpi^{-2}\\ & & 1 & -x\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= (1-q^{-1})\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3}\\ & 1 & & a\varpi^{-2}\\ & & 1 & -x\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx.$$

Proof. We calculate (5) as follows:

$$\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^5 & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3}\\ & 1 & & a\varpi^{-2}\\ & & 1 & -x\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3}\\ & 1 & & a\varpi^{-2}\\ & & 1 & -x\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & -(1+bz\varpi^2)^{-1}b^2z\varpi^{-1}\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(1+bz\varpi^2)^{-1} & -bxz(1+bz\varpi^2)^{-1} & -abz(1+bz\varpi^2)^{-1} & \\ -az(1-bz\varpi^2)\varpi^3 & 1-axz\varpi & -a^2z\varpi & -abz\\ xz(1-bz\varpi^2)\varpi^3 & x^2z\varpi & 1+axz\varpi & bxz\\ -bz^2\varpi^7 & xz\varpi^3 & az\varpi^3 & 1+bz\varpi^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^5 & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b(1-(1+bz\varpi^2)^{-1}bz\varpi^2)\varpi^{-3}\\ & 1 & & a\varpi^{-2}\\ & & 1 & -x\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= (1-q^{-1})\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-3}\\ & 1 & & a\varpi^{-2}\\ & & 1 & -x\varpi^{-2}\\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx.$$

This completes the calculation. □

Lemma 4.4. *If $v \in V(0)$, then we have that (6) is given by*

$$q^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^6&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$
$$= q^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx.$$

Proof. We calculate (6) as follows:

$$q^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^6&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$
$$= q^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1-bz\varpi^3&-bxz\varpi&-abz\varpi&-b^2z\\-az\varpi^4&1-axz\varpi^2&-a^2z\varpi^2&-abz\varpi\\xz\varpi^4&x^2z\varpi^2&1+axz\varpi^2&bxz\varpi\\z\varpi^6&xz\varpi^4&az\varpi^4&1+bz\varpi^3\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$
$$= q^{-1}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx.$$

This completes the calculation. □

Finally, to calculate the remaining term (3) of (P3) in Lemma 4.1, let

$$D(a,b)=\begin{bmatrix}1&&&\\&ab^{-1}&&\\&&a^{-1}&\\&&&b^{-1}\end{bmatrix},$$

for $a,b\in F^\times$. Then, we decompose (3) into two further terms as follows:

$$q^{2}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(-b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} & -b\varpi^{-3} \\ & 1 && a\varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$= q^2\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(D(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ bz\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & ab^{-1}x\varpi^{-2} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -ab^{-1}x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$= \chi(-1)q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(D(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$= q^2\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(D(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$+ q^2\chi(-1) \int\limits_{1+\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(D(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz.$$

Lemma 4.5. *If $v \in V(0)$, then we have that (7) is given by*

$$q^2\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(D(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dx\, dz$$

$$= q^2\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ba(1-z)z)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&-x\varpi^{-3}&b(x-za\varpi)\varpi^{-4}\\&1&b^{-1}(x+a\varpi)\varpi^{-2}&-x\varpi^{-3}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$
$$+\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(abz(1-z))\eta\tau\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-1}&-ab(1-z)\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$
$$+q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)}\chi(abx)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-abx^{-1}(1+x-z)\varpi^{-3}\\&1&-ab^{-1}xz(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$
$$+\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b(1-z))\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-b\varpi^{-3}\\&1&-a^2b^{-1}z\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz.$$

Proof. We first consider only the integration over the x variable and break the integral into several pieces.

$$q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx$$
$$= q^2\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx \tag{9}$$
$$+ q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-1}&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx \tag{10}$$

$$
+\int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dx. \tag{11}
$$

We now consider the integral (9):

$$
q^2\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dx
$$

$$
= q^2\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \pi(\begin{bmatrix} 1 && (zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-1} & (x-\varpi)(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(zx+(1-z)\varpi)^{-1} & (zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & x(1-z)^{-1}\varpi^{-1} && \\ & 1 && \\ && 1 & -x(1-z)^{-1}\varpi^{-1} \\ &&& 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} (1-z)^{-1} &&& \\ & (1-z)(zx+(1-z)\varpi)^{-1} && \\ && (1-z)^{-1}(zx+(1-z)\varpi) & \\ &&& 1-z \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ & zx^2(zx+(1-z)\varpi)^{-1} & 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z(zx+(1-z)\varpi)(1-z)^{-2}\varpi^2 &&& 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ zx(1-z)^{-1}\varpi && 1 & \\ & zx(1-z)^{-1}\varpi && 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -(1-z)^{-1}z\varpi & 1 && \\ && 1 & \\ && (1-z)^{-1}z\varpi & 1 \end{bmatrix})v\,dx
$$

$$
= q^2\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \pi(\begin{bmatrix} 1 && (zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-1} & (x-\varpi)(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(zx+(1-z)\varpi)^{-1} & (zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & x(1-z)^{-1}\varpi^{-1} && \\ & 1 && \\ && 1 & -x(1-z)^{-1}\varpi^{-1} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dx
$$

$$
= q^2\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \pi(\tau^{-1} \begin{bmatrix} 1 && (zx+(1-z)\varpi)^{-2}\varpi^{-1} & (x-\varpi)(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & (zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(1-z)^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -x(1-z)^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx.$$

Next, we consider the integral (10). For $z \in \mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})$, it will be helpful to consider the following set $A(z) = -z^{-1}(1-z) + \mathfrak{p}$ in order to apply the useful identity (2). We calculate (10) as follows:

$$q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$= q\int\limits_{A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x-z^{-1}(1-z)\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -(x-z^{-1}(1-z)\varpi^{-1}) \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}(1-z)\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -(1-x\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & z^{-1}(1-z)\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} & (x-1)(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & (1-z)^{-1}x\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -(1-z)^{-1}x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1-z)^{-1} & & & \\ -z(1-z+zx)^{-1}\varpi & (1-z+zx)^{-1}(1-z) & & \\ zx(1-z)^{-1}\varpi^2 & zx^2(1-z)^{-1}\varpi & (1-z)^{-1}(1-z+zx) & \\ z\varpi^3 & zx\varpi^2 & z\varpi & 1-z \end{bmatrix})v\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}(1-z)\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -(1-x\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & z^{-1}(1-z)\varpi^{-1} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 && (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} & (x-1)(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & (1-z)^{-1}x\varpi^{-1} && \\ & 1 && \\ && 1 & -(1-z)^{-1}x\varpi^{-1} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}(1-z)\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -(1-x\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & z^{-1}(1-z)\varpi^{-1} \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1-z+zx\varpi)^{-1} & \dfrac{-z(1-x\varpi)}{(1-z)\varpi^2} & \dfrac{-(1-z+(z-1)x\varpi)}{(1-z+zx\varpi)\varpi} & -z(1-x\varpi)^2\varpi^{-3} \\ & \dfrac{z(1-z+zx\varpi)}{(1-z)^2\varpi} & \dfrac{2(1-z)+zx\varpi}{1-z+zx\varpi} & z(1-x\varpi)\varpi^{-2} \\ && \dfrac{(1-z)^2\varpi}{z(1-z+zx\varpi)} & (1-z)(1-x\varpi)\varpi^{-1} \\ &&& 1-z+zx\varpi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ & -z^2x(1-z)^{-2} & 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ && -1 & \\ & 1 && \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ \dfrac{z^2x\varpi^4}{(1-z)^2+(2-2z+zx\varpi)zx\varpi} &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ \dfrac{-(1-z)\varpi^2}{1-z+zx\varpi} && 1 & \\ & \dfrac{-(1-z)\varpi^2}{1-z+zx\varpi} && 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ \dfrac{-z\varpi}{1-z+zx\varpi} & 1 && \\ && 1 & \\ && \dfrac{z\varpi}{1-z+zx\varpi} & 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 && (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} & (x-1)(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & (1-z)^{-1}x\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -(1-z)^{-1}x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx
$$

$$
= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}(1-z)\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -(1-x\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & z^{-1}(1-z)\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} (1-z+zx\varpi)^{-1} & \dfrac{-z(1-x\varpi)}{(1-z)\varpi^2} & \dfrac{-(1-z+(z-1)x\varpi)}{(1-z+zx\varpi)\varpi} & -z(1-x\varpi)^2\varpi^{-3} \\ & \dfrac{z(1-z+zx\varpi)}{(1-z)^2\varpi} & \dfrac{2(1-z)+zx\varpi}{1-z+zx\varpi} & z(1-x\varpi)\varpi^{-2} \\ & & \dfrac{(1-z)^2\varpi}{z(1-z+zx\varpi)} & (1-z)(1-x\varpi)\varpi^{-1} \\ & & & 1-z+zx\varpi \end{bmatrix})v\,dx
$$

$$
+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} & (x-1)(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & (1-z)^{-1}x\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -(1-z)^{-1}x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx
$$

$$
= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\tau \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}(1-z)\varpi^{-2} & \varpi^{-1} & -(1-x\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-1} \\ & & 1 & z^{-1}(1-z)\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{(1-z)(x\varpi-1)}{(1-z+xz\varpi)\varpi^2} & \dfrac{z(x\varpi-1)}{(1-z)\varpi} & \dfrac{-z(x\varpi-1)^2}{(1-z+xz\varpi)\varpi^3} \\ & 1 & \dfrac{z(2(1-z)+zx\varpi)\varpi}{(1-z)^2} & \dfrac{-z(x\varpi-1)}{\varpi(1-z+xz\varpi)} \\ & & 1 & \dfrac{-(1-z)(x\varpi-1)}{(1-z+xz\varpi)\varpi^2} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx
$$

$$
+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} & (x-1)(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & (1-z)^{-1}x\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -(1-z)^{-1}x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\tau \begin{bmatrix} 1 & -(1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & (1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & & (1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-1} & (1+z^2(x\varpi-1)^2-2z+xz\varpi)(1-z+xz\varpi)^{-2}z^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & z(2-2z+xz\varpi)(1-z)^{-2}\varpi & (1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx \\
&+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} & (x-1)(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & (1-z)^{-1}x\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -(1-z)^{-1}x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx \\
&= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\tau \begin{bmatrix} 1 & -(1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & (1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & & (1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-1} & (1+z^2(x\varpi-1)^2-2z+xz\varpi)(1-z+xz\varpi)^{-2}z^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & & (1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx \\
&+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \pi(\begin{bmatrix} 1 & (1-z)^{-1}x\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -(1-z)^{-1}x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & & (1-z)^{-1}\varpi^{-2} & (z-x-1)(1-z)^{-2}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & (1-z)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx.
\end{aligned}
$$

Next, (11) is given by

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -x\varpi \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx \\
&= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \varpi^{-2} & -(1+x\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx
\end{aligned}
$$

$$= \int_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & (1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & -(1+x\varpi)(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-1} & (1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1-z-zx\varpi)^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1-z-zx\varpi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -z(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & z(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx$$

$$= \int_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & (1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & -(1+x\varpi)(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-1} & (1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx.$$

Returning to the integral (7), we have

$$q^2\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(D(a,b) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -x\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q^2\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\tau^{-1}\pi(D(a,b)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & (zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & (x-\varpi)(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -z(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & (zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(1-z)^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -x(1-z)^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+ \chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \chi(b)\eta\tau\pi(D(a,b)$$

$$
\begin{bmatrix}1&-(1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&(1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&&(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-1}&(1+z^2(x\varpi-1)^2-2z+xz\varpi)(1-z+xz\varpi)^{-2}z^{-1}\varpi^{-3}\\&1&&(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz
$$

$$
+\,q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&(1-z)^{-1}x\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-(1-z)^{-1}x\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&&(1-z)^{-1}\varpi^{-2}&(z-x-1)(1-z)^{-2}\varpi^{-3}\\&1&-z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1}&(1-z)^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz
$$

$$
+\,\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\int\limits_{\mathfrak{o}}\eta\pi(D(a,b)
$$

$$
\begin{bmatrix}1&&(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-2}&-(1+x\varpi)(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-3}\\&1&-z(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-1}&(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz
$$

$$
=q^2\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\tau^{-1}\pi(
$$

$$
\begin{bmatrix}1&&a(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2}&b(x-\varpi)(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-3}\\&1&-a^2b^{-1}z(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2}&a(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&a^{-1}bx(1-z)^{-1}\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-a^{-1}bx(1-z)^{-1}\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz
$$

$$
+\,\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(b)\eta\tau\pi(
$$

$$
\begin{bmatrix}1&-a^{-1}b(1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&a^{-1}b(1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-1} & b(1+z^2(x\varpi-1)^2-2z+xz\varpi)(1-z+xz\varpi)^{-2}z^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & & a(1-z+xz\varpi)^{-1}\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\,q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\ \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\ \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & a^{-1}b(1-z)^{-1}x\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a^{-1}b(1-z)^{-1}x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a(1-z)^{-1}\varpi^{-2} & b(z-x-1)(1-z)^{-2}\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & a(1-z)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\,\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\ \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\int\limits_{\mathfrak{o}}\eta\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & -b(1+x\varpi)(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-1} & a(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\ \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ba(1-z)x)\eta\tau^{-1}\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & ba(1-z)x^{-1}(x-\varpi)(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}(1-z)^{-1}xz(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & a(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\,\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\ \int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(b)\eta\tau\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}b(1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-2}\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a^{-1}b(1-z)z^{-1}(1-z+xz\varpi)^{-2}\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-1} & b(1+z^2(x\varpi-1)^2-2z+xz\varpi)(1-z+xz\varpi)^{-2}z^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & & a\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+ q\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & a^{-1}b(1-z)^{-2}x\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a^{-1}b(1-z)^{-2}x\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & b(z-x-1)(1-z)^{-2}\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2(1-z)^2b^{-1}z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+ \chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b) \int\limits_{\mathfrak{o}} \eta\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -b(1+x\varpi)(1-z-zx\varpi)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z(1-z-zx\varpi)\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$= q^2\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ba(1-z)z)\eta\tau^{-1}\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & ba(1-z)x^{-1}(x-\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}(1-z)^{-1}xz\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+ \chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \chi(b)\eta\tau\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}b(1-z)z^{-1}\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a^{-1}b(1-z)z^{-1}\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-1} & b(1+z^2(x\varpi-1)^2-2z+xz\varpi)z^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & & a\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+ q\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - A(z)} \chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & a^{-1}bx\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a^{-1}bx\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & b(z-x-1)\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(b(1-z))\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -b(1+x\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ba(1-z)z)\eta\tau^{-1}\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & ba(1-z-x^{-1}\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}xz\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(abz(1-z))\eta\tau\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-1} & -ab(1-z)^{-1}(1+z^2(x\varpi-1)^2-2z+xz\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 & & a\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)}\chi(abx)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & abx^{-1}(z-x-1)\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}xz(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b(1-z))\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -b\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ba(1-z)z)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a(xz+\varpi)\varpi^{-3} & -ba(1+x^{-1}\varpi)(xz+\varpi)\varpi^{-4} \\ & 1 & -ab^{-1}xz\varpi^{-2} & a(xz+\varpi)\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(abz(1-z))\eta\tau\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-1} & -ab(1-z)^{-1}((1-z)^2+(x^2z^2\varpi-2xz^2+xz)\varpi)\varpi^{-3} \\ & 1 & & a\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\,q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)}\chi(abx)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -abx^{-1}(1+x-z)\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}xz(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\,\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b(1-z))\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -b\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ba(1-z)z)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & x\varpi^{-3} & -bx(1+az(x-a\varpi)^{-1}\varpi)\varpi^{-4} \\ & 1 & -b^{-1}(x-a\varpi)\varpi^{-2} & x\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(abz(1-z))\eta\tau\pi(\begin{bmatrix} 1 & b\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a(1-z)^{-2}\varpi^{-1} & -ab(1-z)^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & & a(1-z)^{-2}\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$
+ q\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)} \chi(abx)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & -abx^{-1}(1+x-z)\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}xz(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz
$$

$$
+ \chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b(1-z))\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & -b\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz
$$

$$
= q^2\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ba(1-z)z)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1 & & -x\varpi^{-3} & -b(-x+z(a^{-1}+x^{-1}\varpi)^{-1}\varpi)\varpi^{-4} \\ & 1 & b^{-1}(x+a\varpi)\varpi^{-2} & -x\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz
$$

$$
+ \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}} \chi(abz(1-z))\eta\tau\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-2} \\ & & & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-1} & -ab(1-z)\varpi^{-3} \\ & 1 & & a\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz
$$

$$
+ q\chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)} \chi(abx)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & -abx^{-1}(1+x-z)\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}xz(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz
$$

$$
+ \chi(-1) \int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b(1-z))\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & -b\varpi^{-3} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z\varpi^{-1} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz
$$

$$= q^2\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ba(1-z)z)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&-x\varpi^{-3}&b(x-za\varpi)\varpi^{-4}\\&1&b^{-1}(x+a\varpi)\varpi^{-2}&-x\varpi^{-3}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(abz(1-z))\eta\tau\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-1}&-ab(1-z)\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)}\chi(abx)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-abx^{-1}(1+x-z)\varpi^{-3}\\&1&-ab^{-1}xz(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b(1-z))\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-b\varpi^{-3}\\&1&-a^2b^{-1}z\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dz.$$

This completes the calculation. □

The identities from the next lemma will be used in the calculation of the remaining term (8).

Lemma 4.6. *Let $v \in V(0)$ and $z \in 1+\mathfrak{p}$.*

(1) *Assume that $x \in \mathfrak{o}^\times$. Then:*

$$\pi(\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v$$

$$=\pi(\begin{bmatrix}\varpi^{-1}&&&\\&\varpi^2&&\\&&\varpi^{-2}&\\&&&\varpi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&(xz)^{-1}\varpi^{-2}&z^{-1}\varpi^{-1}\\&1&-z(xz+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-4}&(xz)^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v.$$

(2) *Assume that* $x \in \mathfrak{o}^\times$. *Then:*

$$\pi(\begin{bmatrix} 1&&& \\ &1&& \\ &&1& \\ z\varpi^3&&&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-1} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v$$

$$= \pi(\begin{bmatrix} \varpi^{-1}&&& \\ &\varpi&& \\ &&\varpi^{-1}& \\ &&&\varpi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 && (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} & -z^{-2}(1-z+x)^{-1}\varpi^{-1}+z^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & -(1-z+zx)^{-1}z\varpi^{-3} & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v.$$

(3) *Assume that* $x \in (1-z^{-1})\varpi^{-1} + \mathfrak{o}^\times$. *Then:*

$$\pi(\begin{bmatrix} 1&&& \\ &1&& \\ &&1& \\ z\varpi^3&&&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ && 1 & -x \\ &&& 1 \end{bmatrix})v$$

$$= \pi(\begin{bmatrix} \varpi^{-1}&&& \\ &1&& \\ &&1& \\ &&&\varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && -z^{-1}w^{-1}\varpi^{-2} & (1+zw\varpi)z^{-2}w^{-1}\varpi^{-2} \\ & 1 & w^{-1}\varpi^{-2} & -z^{-1}w^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v$$

where $w = (1 - x\varpi - z^{-1})\varpi^{-1} \in \mathfrak{o}^\times$.

(4) *Assume that* $x \in (1-z^{-1})\varpi^{-1} + \varpi\mathfrak{o}^\times$. *Then:*

$$\pi(\begin{bmatrix} 1&&& \\ &1&& \\ &&1& \\ z\varpi^3&&&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ && 1 & -x \\ &&& 1 \end{bmatrix})v$$

$$= \pi(\begin{bmatrix} \varpi^{-1}&&& \\ &\varpi^{-1}&& \\ &&\varpi& \\ &&&\varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^{-1} && \\ & 1 && \\ && 1 & z^{-1}\varpi^{-1} \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& z^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & w^{-1}\varpi^{-1} & \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v$$

where $w = (1 - x\varpi - z^{-1})\varpi^{-2} \in \mathfrak{o}^\times$.

(5) *Assume that* $x \in (1-z^{-1})\varpi^{-1} + \mathfrak{p}^2$. *Then:*

$$\pi(\begin{bmatrix} 1&&& \\ &1&& \\ &&1& \\ z\varpi^3&&&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ && 1 & -x \\ &&& 1 \end{bmatrix})v$$

$$= \pi(\begin{bmatrix} \varpi^{-1}&&& \\ &\varpi^{-2}&& \\ &&\varpi^2& \\ &&&\varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^{-2} && \varpi^{-1} \\ & 1 && \\ && 1 & z^{-1}\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix})v.$$

Proof. To prove the first assertion, we note that we have the matrix identity

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \varpi^{-1} &&& \\ & \varpi^2 && \\ && \varpi^{-2} & \\ &&& \varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && (xz)^{-1}\varpi^{-2} & z^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & -z(xz+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-4} & (xz)^{-1}\varpi{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} && -(xz)^{-1} & \\ -x^{-1} && -(1-z)(zx+(1-z)\varpi)^{-1}x^{-1}\varpi^{-1} & -(1-z)^2z^{-1}x^{-1}(zx+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-2} \\ && \varpi^2 & -x \\ z\varpi^2 & zx & z & (1-z)\varpi^{-1} \end{bmatrix}$$

where the last matrix is in $\mathrm{GSp}(4,\mathfrak{o})$.

For the second assertion, we have a similar identity

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-1} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -x\varpi^{-1} \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \varpi^{-1} &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} & -z^{-2}(1-z+x)^{-1}\varpi^{-1}+z^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & -(1-z+zx)^{-1}z\varpi^{-3} & (1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\varpi}{z(x+1-z)} & \dfrac{x}{z(x+1-z)} & \dfrac{(z-1)^2}{z(x+1-z)(xz+1-z)\varpi} & \dfrac{-(z-1)^3}{z^2(x+1-z)(xz+1-z)\varpi^2} \\ -z(xz+1-z) & \dfrac{(1-z)}{(xz+1-z)\varpi} && \\ && \varpi & -x \\ z\varpi^2 & xz\varpi & z & (1-z)\varpi^{-1} \end{bmatrix}$$

where the last matrix is again in $\mathrm{GSp}(4,\mathfrak{o})$.

For the third assertion, recall that $x \in (1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{o}^\times$ and $w=(1-x\varpi-z^{-1})\varpi^{-1} \in \mathfrak{o}^\times$. Then we have the identity

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ z\varpi^3 &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 && \varpi^{-2} \\ && 1 & -x \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \varpi^{-1} &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& \varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && -z^{-1}w^{-1}\varpi^{-2} & (1+zw\varpi)z^{-2}w^{-1}\varpi^{-2} \\ & 1 & w^{-1}\varpi^{-2} & -z^{-1}w^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(zw)^{-1} & -x(zw)^{-1} & & \\ w^{-1} & (z-1)(zw)^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & & 1 & -x \\ z\varpi^2 & xz\varpi^2 & z & (1-z)\varpi^{-1} \end{bmatrix}$$

where the last matrix is again in $\mathrm{GSp}(4,\mathfrak{o})$.

For the fourth assertion, recall that $x \in (1-z^{-1})\varpi^{-1} + \varpi\mathfrak{o}^\times$ and $w = (1 - x\varpi - z^{-1})\varpi^{-2} \in \mathfrak{o}^\times$. Then we have the identity

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -x \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varpi^{-1} & & & \\ & \varpi^{-1} & & \\ & & \varpi & \\ & & & \varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & z^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & z^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & w^{-1}\varpi^{-1} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & z^{-1} & & \\ w^{-1} & (1-z^{-1})w^{-1}\varpi^{-1} & & \\ -\varpi & -x\varpi & & w \\ z\varpi^2 & xz\varpi^2 & z & (1-z)\varpi^{-1} \end{bmatrix}$$

where the last matrix is again in $\mathrm{GSp}(4,\mathfrak{o})$.

For the final assertion, recall that $x \in (1-z^{-1})\varpi^{-1} + \mathfrak{p}^2$. Then we have the identity

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -x \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varpi^{-1} & & & \\ & \varpi^{-2} & & \\ & & \varpi^2 & \\ & & & \varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^{-2} & & \varpi^{-1} \\ & 1 & & \\ & & 1 & z^{-1}\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1-z)\varpi & (1+(1-z)xz\varpi)z^{-1} & (1-z)\varpi^{-1} & (1-z)^2z^{-1}\varpi^{-2} \\ & \varpi^2 & & 1 \\ -1 & -x & & -(1-z+xz\varpi)z^{-1}\varpi^{-3} \\ z\varpi^2 & xz\varpi^2 & z & (1-z)\varpi^{-1} \end{bmatrix}$$

where again the last matrix is in $\mathrm{GSp}(4,\mathfrak{o})$. This completes the proof of the lemma. □

Lemma 4.7. *If $v \in V(0)$, then we have that* (8) *is given by*

$$q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ z\varpi^3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x\varpi^{-2} & \varpi^{-2} & -\varpi^{-3} \\ & 1 & & \varpi^{-2} \\ & & 1 & -x\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-1} \\ & 1 & x\varpi^{-4} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(bx)\eta^2\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b(x-1)\varpi^{-1}\\&1&-a^2b^{-1}\varpi^{-3}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+q^{-1}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(bx)\eta^2\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b(1+x\varpi)\varpi^{-2}\\&1&a^2b^{-1}\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+q^{-2}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau\pi(\begin{bmatrix}1&a\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&b\varpi^{-1}\\&1&x\varpi^{-1}&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+q^{-3}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^2\pi(\begin{bmatrix}1&a\varpi^{-2}&&b\varpi^{-1}\\&1&&\\&&1&-a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db.$$

Proof. Using the identities from Lemma 4.6, we calculate

$$q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+q\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-1}&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+q\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-1}&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&x&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\varpi\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&x&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{p}^2)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\z\varpi^3&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&x&\varpi^{-2}&-\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-2}\\&&1&-x\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\pi(\begin{bmatrix}\varpi^{-1}&&&\\&\varpi^2&&\\&&\varpi^{-2}&\\&&&\varpi\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&(xz)^{-1}\varpi^{-2}&z^{-1}\varpi^{-1}\\&1&-z(xz+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-4}&(xz)^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+q\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}\varpi^{-1}&&&\\&\varpi&&\\&&\varpi^{-1}&\\&&&\varpi\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2}&-z^{-2}(1-z+x)^{-1}\varpi^{-1}+z^{-1}\varpi^{-1}\\&1&-(1-z+zx)^{-1}z\varpi^{-3}&(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}\varpi^{-1}&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&\varpi\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-z^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi^{-1}&\dfrac{(1+z(1-x\varpi-z^{-1}))}{z^2(1-x\varpi-z^{-1})}\varpi^{-1}\\&1&(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi^{-1}&-z^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\varpi\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}\varpi^{-1}&&&\\&\varpi^{-1}&&\\&&\varpi&\\&&&\varpi\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-z^{-1}\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&z^{-1}\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&z^{-1}\varpi^{-1}\\&1&(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{p}^2)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(D(a,b)\begin{bmatrix}\varpi^{-1}&&&\\&\varpi^{-2}&&\\&&\varpi^2&\\&&&\varpi\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-z^{-1}\varpi^{-2}&&\varpi^{-1}\\&1&&\\&&1&z^{-1}\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-2}\pi(D(a,b)$$

$$\begin{bmatrix}1&&(xz)^{-1}\varpi^{-2}&z^{-1}\varpi^{-1}\\&1&-z(xz+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-4}&(xz)^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+q\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-1}\pi(D(a,b)$$

$$\begin{bmatrix}1&&(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2}&-z^{-2}(1-z+x)^{-1}\varpi^{-1}+z^{-1}\varpi^{-1}\\&1&-(1-z+zx)^{-1}z\varpi^{-3}&(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\pi(D(a,b)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & -z^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi^{-1} & \dfrac{(1+z(1-x\varpi-z^{-1}))}{z^2(1-x\varpi-z^{-1})}\varpi^{-1} \\ & 1 & (1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi^{-1} & -z^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\varpi\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau\pi(D(a,b)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & z^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & z^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & (1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{p}^2)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^2\pi(D(a,b)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^{-2} & & \varpi^{-1} \\ & 1 & & \\ & & 1 & z^{-1}\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-2}\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a(xz)^{-1}\varpi^{-2} & bz^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & -a^2b^{-1}z(xz+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-4} & a(xz)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+q\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-1}\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & & a(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} & -bz^{-2}(1-z+x)^{-1}\varpi^{-1}+bz^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & -a^2b^{-1}(1-z+zx)^{-1}z\varpi^{-3} & a(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & & -az^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi^{-1} & \dfrac{b(1+z(1-x\varpi-z^{-1}))}{z^2(1-x\varpi-z^{-1})}\varpi^{-1} \\ & 1 & a^2b^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi^{-1} & -az^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\varpi\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau\pi($$

$$\begin{bmatrix}1&-a^{-1}bz^{-1}\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&a^{-1}bz^{-1}\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&bz^{-1}\varpi^{-1}\\&1&a^2b^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{p}^2)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^2\pi($$

$$\begin{bmatrix}1&-a^{-1}bz^{-1}\varpi^{-2}&&b\varpi^{-1}\\&1&&\\&&1&a^{-1}bz^{-1}\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$=q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix}1&&ax^{-1}\varpi^{-2}&bz^{-1}\varpi^{-1}\\&1&-a^2b^{-1}z(x+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-4}&ax^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+q\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-1}\pi($$

$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-bz^{-2}(1-z+x)^{-1}\varpi^{-1}+bz^{-1}\varpi^{-1}\\&1&-a^2b^{-1}(1-z+zx)z\varpi^{-3}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\pi($$

$$\begin{bmatrix}1&&-az^{-1}\varpi^{-2}&\dfrac{b(1+z(1-x\varpi-z^{-1}))}{z^2(1-x\varpi-z^{-1})}\varpi^{-1}\\&1&a^2b^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})\varpi^{-3}&-az^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\varpi\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau\pi($$

$$\begin{bmatrix}1&-a^{-1}b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&a^{-1}b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&b\varpi^{-1}\\&1&a^2b^{-1}z^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+q^{-3}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^2\pi(\begin{bmatrix}1&a\varpi^{-2}&&b\varpi^{-1}\\&1&&\\&&1&-a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db$$

$$= q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix}1&&ax^{-1}\varpi^{-2}&b\varpi^{-1}\\&1&-a^2b^{-1}(x+(1-z)\varpi)^{-1}\varpi^{-4}&ax^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-1}\pi($$

$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-bz^{-1}(1-z+x)^{-1}\varpi^{-1}+bz^{-1}\varpi^{-1}\\&1&-a^2b^{-1}(1-z+zx)\varpi^{-3}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ \chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\pi($$

$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&\dfrac{b(1+z(1-x\varpi-z^{-1}))}{z^2(1-x\varpi-z^{-1})}\varpi^{-1}\\&1&a^2b^{-1}z^2(1-x\varpi-z^{-1})\varpi^{-3}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ \chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{((1-z^{-1})\varpi^{-1}+\varpi\mathfrak{o}^\times)}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau\pi($$

$$\begin{bmatrix}1&a\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&b\varpi^{-1}\\&1&a^{-2}bz^{-1}(1-x\varpi-z^{-1})^{-1}\varpi&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^{-3}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^2\pi(\begin{bmatrix}1&a\varpi^{-2}&&b\varpi^{-1}\\&1&&\\&&1&-a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db$$

$$= q^2\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(bx)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix}1&&ax^{-1}\varpi^{-2}&bx^{-1}\varpi^{-1}\\&1&-a^2b^{-1}\varpi^{-4}&ax^{-1}\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b(1-x^{-1})\varpi^{-1}\\&1&-a^2b^{-1}(1-z+zx)\varpi^{-3}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ \chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-b(1-zx\varpi)z^{-2}x^{-1}\varpi^{-2}\\&1&-a^2b^{-1}z^2x\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^{-1}\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau\pi($$

$$\begin{bmatrix} 1 & a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & b\varpi^{-1} \\ & 1 & a^{-2}bz^{-1}x\varpi^{-1} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^{-3}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta^2\tau^2\pi(\begin{bmatrix} 1 & a\varpi^{-2} & & b\varpi^{-1} \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db$$

$$= q^{2}\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(bx)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & bx^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & -a^2x^2b^{-1}\varpi^{-4} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q\chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(bx)\eta^2\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & b(x-1)\varpi^{-1} \\ & 1 & -a^2b^{-1}\varpi^{-3} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ \chi(-1)\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(bx)\eta^2\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & -b(1-zx\varpi)\varpi^{-2} \\ & 1 & -a^2b^{-1}\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$+ q^{-2}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta^2\tau\pi(\begin{bmatrix} 1 & a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & b\varpi^{-1} \\ & 1 & a^{-2}bx\varpi^{-1} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ q^{-3}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta^2\tau^2\pi(\begin{bmatrix} 1 & a\varpi^{-2} & & b\varpi^{-1} \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db$$

$$= q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(b)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-1} \\ & 1 & -a^2xb^{-1}\varpi^{-4} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ \chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(bx)\eta^2\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & b(x-1)\varpi^{-1} \\ & 1 & -a^2b^{-1}\varpi^{-3} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ q^{-1}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(bx)\eta^2\pi(\begin{bmatrix} 1 & & a\varpi^{-2} & b(1+x\varpi)\varpi^{-2} \\ & 1 & a^2b^{-1}\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ q^{-2}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau\pi(\begin{bmatrix}1 & a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & b\varpi^{-1} \\ & 1 & a^{-2}bx\varpi^{-1} & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ q^{-3}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^2\pi(\begin{bmatrix}1 & a\varpi^{-2} & & b\varpi^{-1} \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-2} \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db$$

$$= q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & b\varpi^{-1} \\ & 1 & x\varpi^{-4} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ \chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(bx)\eta^2\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & b(x-1)\varpi^{-1} \\ & 1 & -a^2b^{-1}\varpi^{-3} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ q^{-1}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(bx)\eta^2\pi(\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-2} & b(1+x\varpi)\varpi^{-2} \\ & 1 & a^2b^{-1}\varpi^{-2} & a\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ q^{-2}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau\pi(\begin{bmatrix}1 & a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & b\varpi^{-1} \\ & 1 & x\varpi^{-1} & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+ q^{-3}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^2\pi(\begin{bmatrix}1 & a\varpi^{-2} & & b\varpi^{-1} \\ & 1 & & \\ & & 1 & -a\varpi^{-2} \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,da\,db.$$

This completes the calculation. □

Finally, we are able to calculate term (P3)

Lemma 4.8. *If $v \in V(0)$, then we have that (P3) is given by*

$$q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(t_4\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & x & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -a\varpi^{-1} & b\varpi^{-2} & z\varpi^{-3} \\ & 1 & & b\varpi^{-2} \\ & & 1 & a\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dx\,dz$$

$$= q^2\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(abx(1-z))\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix}1 & b\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -b\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & & a\varpi^{-3} & -ab(1+x\varpi)\varpi^{-4} \\ & 1 & -ab^{-1}(1+xz^{-1}\varpi)^{-1}\varpi^{-2} & a\varpi^{-3} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(abz(1-z))\eta\tau\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-1}&-ab(1-z)\varpi^{-3}\\&1&&a\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\,q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-A(z)}\chi(abx)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&b\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-b\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&abx^{-1}(1+x-z)\varpi^{-3}\\&1&-ab^{-1}xz(1-z+zx)^{-1}\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\,\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}}\chi(b(1-z))\eta\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&-b\varpi^{-3}\\&1&-a^2b^{-1}z\varpi^{-1}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,dx\,da\,db\,dz$$

$$+\,q\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b\varpi^{-1}\\&1&x\varpi^{-4}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+\,q^{-1}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(bx)\eta^2\pi(\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&b(1+x\varpi)\varpi^{-2}\\&1&a^2b^{-1}\varpi^{-2}&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+\,q^{-2}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau\pi(\begin{bmatrix}1&a\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&-a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&b\varpi^{-1}\\&1&x\varpi^{-1}&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx$$

$$+\,q^{-3}\chi(-1)\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta^2\tau^2\pi(\begin{bmatrix}1&a\varpi^{-2}&&b\varpi^{-1}\\&1&&\\&&1&-a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db$$

$$+\,q\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(b)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&x\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&-x\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&a\varpi^{-2}&(b\varpi-ax)\varpi^{-4}\\&1&&a\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dx.$$

Proof. The proof follows by combining the formulas in Lemmas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, and 4.7. □

5. Calculation of the Fourth Part (P4)

In this section, we compute the final summand of the operator defined in [JR1]. We continue to use the same techniques as in the previous sections, in particular, the invariance of v under $\mathrm{GSp}(4,\mathfrak{o})$ and the useful identity (2).

Lemma 5.1. *If $v \in V(0)$, then we have that (P4) is given by*

$$q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(t_4\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&y&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-3}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$=\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta\pi(\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-2}&&\\&1&&\\&&1&a\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&y\varpi^{-1}&a(y+b)\varpi^{-3}\\&1&&y\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy$$

$$+q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&&\\&1&&\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&&y\varpi^{-2}&a(y+bz)\varpi^{-3}\\&1&a^{-1}(y+bz(z-1)^{-1})\varpi^{-1}&y\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(a)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix}1&&b\varpi^{-2}&-a\varpi^{-1}\\&1&y\varpi^{-3}&b\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy.$$

Proof. For $a, b \in \mathfrak{o}^\times$, define the diagonal matrix

$$C(a,b)=\begin{bmatrix}1&&&\\&a&&\\&&b&\\&&&ab\end{bmatrix}.$$

Then we calculate as follows:

$$q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\pi(t_4\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&y&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\varpi^{-1}&b\varpi^{-2}&z\varpi^{-3}\\&1&&b\varpi^{-2}\\&&1&a\varpi^{-1}\\&&&1\end{bmatrix})\tau v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$=q^2\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\tau^{-1}\pi(C(a,b)t_4\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&y\varpi^{-2}&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&-\varpi^{-2}&\varpi^{-1}&z\varpi^{-3}\\&1&&\varpi^{-1}\\&&1&\varpi^{-2}\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^4\tau^{-1}\pi(C(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 & -y\varpi^{-2} & \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ \varpi^{-1} && 1 & \\ -z\varpi^{-3} & \varpi^{-1} & \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dy\, dz.$$

We first focus on the integration over z.

$$\int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ \varpi^{-1} && 1 & \\ z\varpi^{-3} & \varpi^{-1} & \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix})v\, dz$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ \varpi^{-1} && 1 & \\ (z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-1} && 1 \end{bmatrix})v\, dz$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}} \pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-1} & \varpi \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\varpi &&& \\ (z-1)\varpi^{-1} & -\varpi && \\ && -\varpi^{-1} & \\ && -(z-1)\varpi^{-3} & -\varpi^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} && 1 & \\ &&& 1 \\ -1 &&& \\ & -1 && \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-1} & \varpi \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, dz$$

$$= \int\limits_{1+\mathfrak{p}} \pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-1} & \varpi \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\varpi &&& \\ (z-1)\varpi^{-1} & -\varpi && \\ && -\varpi^{-1} & \\ && -(z-1)\varpi^{-3} & -\varpi^{-1} \end{bmatrix})v\, dz$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})} \pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-1} & \varpi \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\varpi &&& \\ (z-1)\varpi^{-1} & -\varpi && \\ && -\varpi^{-1} & \\ && -(z-1)\varpi^{-3} & -\varpi^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} && 1 & \\ &&& 1 \\ -1 &&& \\ & -1 && \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-1} & \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\, dz$$

$$= \int\limits_{1+\mathfrak{p}} \pi(\begin{bmatrix} \varpi &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-1} & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -(z-1)\varpi^{-2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & (z-1)\varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\varpi^{-2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \varpi & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-1} & \varpi \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\varpi & & & \\ (z-1)\varpi^{-1} & -\varpi & & \\ & & -\varpi^{-1} & \\ & & -(z-1)\varpi^{-3} & -\varpi^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ (z-1)\varpi^{-1} & & & 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$=\int\limits_{1+\mathfrak{p}} \pi(\begin{bmatrix} \varpi & & & \\ & \varpi & & \\ & & \varpi^{-1} & \\ & & & \varpi^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\varpi^{-2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \varpi^{-1} & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -(z-1)\varpi^{-2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & (z-1)\varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})} \pi(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\varpi^{-2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \varpi & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-1} & \varpi \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\varpi & & & \\ (z-1)\varpi^{-1} & -\varpi & & \\ & & -\varpi^{-1} & \\ & & -(z-1)\varpi^{-3} & -\varpi^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & (z-1)^{-1}\varpi \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(z-1)^{-1}\varpi & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -(z-1)\varpi^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -1 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & (z-1)^{-1}\varpi \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$=\int\limits_{1+\mathfrak{p}} \pi(\begin{bmatrix} \varpi & & & \\ & \varpi & & \\ & & \varpi^{-1} & \\ & & & \varpi^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\varpi^{-2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \varpi^{-1} & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -(z-1)\varpi^{-2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & (z-1)\varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})} \pi(\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-1} & \varpi \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\varpi &&& \\ (z-1)\varpi^{-1} & -\varpi && \\ && -\varpi^{-1} & \\ && -(z-1)\varpi^{-3} & -\varpi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& (z-1)^{-1}\varpi \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& \varpi^{-1} \end{bmatrix})v\,dz$$

$$=\int\limits_{1+\mathfrak{p}} \pi(\begin{bmatrix} \varpi &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-1} & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -(z-1)\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && (z-1)\varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})} \pi(\begin{bmatrix} \varpi^2 &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-1} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-2} & \\ & 1 & -(z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -(z-1)\varpi^{-1} & 1 && \\ && 1 & \\ && (z-1)\varpi^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$=\int\limits_{1+\mathfrak{p}} \pi(\begin{bmatrix} \varpi &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -(z-1)\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && (z-1)\varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-1} & \\ & 1 & (z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})} \pi(\begin{bmatrix} \varpi^2 &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-1} & 1 && \\ && 1 & \\ && \varpi^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -(z-1)\varpi^{-1} & 1 && \\ && 1 & \\ && (z-1)\varpi^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-2} & \\ & 1 & (z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$= \int\limits_{1+\mathfrak{p}} \pi(\begin{bmatrix} \varpi &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -z\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && z\varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-1} & \\ & 1 & (z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dz$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})} \pi(\begin{bmatrix} \varpi^2 &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -z\varpi^{-1} & 1 && \\ && 1 & \\ && z\varpi^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-2} & (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & (z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,dz.$$

Substituting into the full integral, we have

$$q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^4\tau^{-1}\pi(C(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 & -y\varpi^{-2} & \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&& \\ -\varpi^{-2} & 1 && \\ \varpi^{-1} && 1 & \\ -z\varpi^{-3} & \varpi^{-1} & \varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q^2 \int\limits_{1+\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^4\tau^{-1}\pi(C(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 & -y\varpi^{-2} & \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -z\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && z\varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-1} & \\ & 1 & (z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^4\tau^{-1}\pi(C(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 & -y\varpi^{-2} & \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi^2 &&& \\ & \varpi && \\ && \varpi^{-1} & \\ &&& \varpi^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -z\varpi^{-1} & 1 && \\ && 1 & \\ && z\varpi^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-2} & (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & (z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q^2 \int\limits_{1+\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^3\tau^{-2}\pi(C(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 & -y\varpi^{-4} & \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -z\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && z\varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-1} & \\ & 1 & (z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q^2 \int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(C(a,b) \begin{bmatrix} 1 &&& \\ & 1 & -y\varpi^{-4} & \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&&\\-z\varpi^{-1}&1&&\\&&1&\\&&z\varpi^{-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\varpi^{-2}&(z-1)^{-1}\varpi^{-1}\\&1&(z-1)\varpi^{-3}&\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^3\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&y\varpi^{-3}&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&&\\-z\varpi^{-2}&1&&\\&&1&\\&&z\varpi^{-2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\varpi^{-1}&\\&1&(z-1)\varpi^{-3}&\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{o}-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&y\varpi^{-3}&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&&\\-z\varpi^{-1}&1&&\\&&1&\\&&z\varpi^{-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\varpi^{-2}&(z-1)^{-1}\varpi^{-1}\\&1&(z-1)\varpi^{-3}&\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^3\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&y\varpi^{-3}&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&&\\-z\varpi^{-2}&1&&\\&&1&\\&&z\varpi^{-2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\varpi^{-1}&\\&1&(z-1)\varpi^{-3}&\varpi^{-1}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&y\varpi^{-3}&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&&\\-z\varpi^{-1}&1&&\\&&1&\\&&z\varpi^{-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\varpi^{-2}&(z-1)^{-1}\varpi^{-1}\\&1&(z-1)\varpi^{-3}&\varpi^{-2}\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&y\varpi^{-3}&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -z\varpi^{-1} & 1 && \\ && 1 & \\ && z\varpi^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-2} & (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & (z-1)\varpi^{-3} & \varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^3\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -z\varpi^{-2} & 1 && \\ && 1 & \\ && z\varpi^{-2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-1} & \\ & 1 & y\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -z\varpi^{-1} & 1 && \\ && 1 & \\ && z\varpi^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-2} & (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & y\varpi^{-3} & \varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix} 1 &&& \\ -z\varpi^{-1} & 1 && \\ && 1 & \\ && z\varpi^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-2} & (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & y\varpi^{-3} & \varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^3\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^2 && \\ & 1 && \\ && 1 & z^{-1}\varpi^2 \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z^{-1}\varpi^2 &&& \\ & z\varpi^{-2} && \\ && -z^{-1}\varpi^2 & \\ &&& -z\varpi^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 && \\ -1 &&& \\ &&& 1 \\ && -1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^2 && \\ & 1 && \\ && 1 & z^{-1}\varpi^2 \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-1} & \\ & 1 & y\varpi^{-3} & \varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi && \\ & 1 && \\ && 1 & z^{-1}\varpi \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z^{-1}\varpi &&& \\ & z\varpi^{-1} && \\ && -z^{-1}\varpi & \\ &&& -z\varpi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 && \\ -1 &&& \\ &&& 1 \\ && -1 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi && \\ & 1 && \\ && 1 & z^{-1}\varpi \\ &&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 && \varpi^{-2} & (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & y\varpi^{-3} & \varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+\,q\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(C(a,b)$$

$$\begin{bmatrix} 1 && -(z-1)^{-1}\varpi^{-2} & (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & -(z^2-2z-y(z-1))(z-1)^{-1}\varpi^{-3} & -(z-1)^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta\pi(C(a,b)\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^{-2} && \\ & 1 && \\ && 1 & z^{-1}\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 && (y-z)z^{-1}\varpi^{-1} & yz^{-2}\varpi^{-3} \\ & 1 && (y-z)z^{-1}\varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+\,q\int\limits_{\mathfrak{o}^\times-(1+\mathfrak{p})}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta\tau^{-1}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}\varpi^{-1} && \\ & 1 && \\ && 1 & z^{-1}\varpi^{-1} \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 && (y-z)z^{-1}\varpi^{-2} & yz^{-2}\varpi^{-3} \\ & 1 & -(z^2-2z-y(z-1))(z-1)^{-1}\varpi^{-1} & (y-z)z^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+\,q\int\limits_{\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(C(a,b)\begin{bmatrix} 1 && -(z-1)^{-1}\varpi^{-2} & (z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & y\varpi^{-3} & -(z-1)^{-1}\varpi^{-2} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q\int\limits_{1+\mathfrak{p}}\int\limits_{\mathfrak{o}}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\int\limits_{\mathfrak{o}^\times}\chi(ab)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}z^{-1}\varpi^{-2} && \\ & 1 && \\ && 1 & a^{-1}z^{-1}\varpi^{-2} \\ &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 && b^{-1}(y-z)z^{-1}\varpi^{-1} & a^{-1}b^{-1}yz^{-2}\varpi^{-3} \\ & 1 && b^{-1}(y-z)z^{-1}\varpi^{-1} \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}z^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a^{-1}z^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & b^{-1}(y-z)z^{-1}\varpi^{-2} & a^{-1}b^{-1}yz^{-2}\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}(z^2-2z-y(z-1))(z-1)^{-1}\varpi^{-1} & b^{-1}(y-z)z^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix} 1 & & -b^{-1}(z-1)^{-1}\varpi^{-2} & a^{-1}b^{-1}(z-1)^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & ab^{-1}y\varpi^{-3} & -b^{-1}(z-1)^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q \int\limits_{1+\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a^{-1}\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & b^{-1}(y-z)z^{-1}\varpi^{-1} & a^{-1}b^{-1}yz^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & & b^{-1}(y-z)z^{-1}\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(abz)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & b^{-1}(y-z)z^{-1}\varpi^{-2} & a^{-1}b^{-1}yz^{-1}\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}(z^2-2z-y(z-1))(z^2-z)^{-1}\varpi^{-1} & b^{-1}(y-z)z^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix} 1 & & b^{-1}\varpi^{-2} & -a^{-1}b^{-1}\varpi^{-1} \\ & 1 & y\varpi^{-3} & b^{-1}\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$= q \int\limits_{1+\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a^{-1}\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & b^{-1}(y-z)\varpi^{-1} & a^{-1}b^{-1}y\varpi^{-3} \\ & 1 & & b^{-1}(y-z)\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\,da\,db\,dy\,dz$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & b^{-1}(y-z)\varpi^{-2} & a^{-1}b^{-1}y\varpi^{-3} \\ & 1 & -ab^{-1}(z^2-2z-y(z-1))(z-1)^{-1}\varpi^{-1} & b^{-1}(y-z)\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dy\, dz$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix} 1 & & b\varpi^{-2} & -ab\varpi^{-1} \\ & 1 & y\varpi^{-3} & b\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dy\, dz$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a^{-1}\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & b^{-1}(y-1)\varpi^{-1} & a^{-1}b^{-1}y\varpi^{-3} \\ & 1 & & b^{-1}(y-1)\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dy$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a^{-1}\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & b^{-1}y\varpi^{-2} & a^{-1}b^{-1}(y+z)\varpi^{-3} \\ & 1 & ab^{-1}(y+z(z-1)^{-1})\varpi^{-1} & b^{-1}y\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dy\, dz$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix} 1 & & b\varpi^{-2} & -ab\varpi^{-1} \\ & 1 & y\varpi^{-3} & b\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dy\, dz$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & by\varpi^{-1} & ab(y+1)\varpi^{-3} \\ & 1 & & by\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dy$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix} 1 & -a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & by\varpi^{-2} & ab(y+z)\varpi^{-3} \\ & 1 & a^{-1}b(y+z(z-1)^{-1})\varpi^{-1} & by\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix})v\, da\, db\, dy\, dz$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{p}} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(a)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix}1 & & b\varpi^{-2} & -a\varpi^{-1} \\ & 1 & y\varpi^{-3} & b\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\, da\, db\, dy\, dz$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\pi(\begin{bmatrix}1 & -a\varpi^{-2} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-2} \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & y\varpi^{-1} & a(y+b)\varpi^{-3} \\ & 1 & & y\varpi^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\, da\, db\, dy$$

$$+ q \int\limits_{\mathfrak{o}^\times - (1+\mathfrak{p})} \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(ab)\eta\tau^{-1}\pi(\begin{bmatrix}1 & -a\varpi^{-1} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & a\varpi^{-1} \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & & y\varpi^{-2} & a(y+bz)\varpi^{-3} \\ & 1 & a^{-1}(y+bz(z-1)^{-1})\varpi^{-1} & y\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\, da\, db\, dy\, dz$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{o}} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \int\limits_{\mathfrak{o}^\times} \chi(a)\eta^2\tau^{-2}\pi(\begin{bmatrix}1 & & b\varpi^{-2} & -a\varpi^{-1} \\ & 1 & y\varpi^{-3} & b\varpi^{-2} \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix})v\, da\, db\, dy.$$

This completes the calculation. □

References

[JR] Johnson-Leung, J., Roberts, B.: *Twisting of Siegel paramodular forms*, arXiv:1404.4596 (2014).

[JR1] Johnson-Leung, J., Roberts, B.: *Twists of paramodular vectors*, Int. J. Number Theory, doi:10.1142/S1793042114500146, (2014).